Harmonic Mapに対する収束定理(非線形楕円型偏微分方程式の解)

AUTHOR(S):

高桑, 昇一郎

CITATION:

高桑, 昇一郎. Harmonic Mapに対する収束定理(非線形楕円型偏微分方程式の解). 数理解析研究所講究録 1989, 679: 240-249

ISSUE DATE:

1989-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/101064

数理解析研究所講究録
第 679 巻 1989 年 240-249

Harmonic Map に対する収束定理

都立大 理学部 高桑昇一郎 (Shôichirô Takakuwa)

1. Harmonic map の定義と例

二つの Riemann 多様体 (M,g), (N,h) 間の C^∞ 写像 $u: M \longrightarrow N$ を考える。このとき、Nash の定理により、N を Euclid 空間 $\mathbf{R}^d$ に等長的に埋め込んでおく。$\mathbf{R}^d$ の座標を用いて $u(x) = (u^\alpha(x)) = (u^1(x), \cdots, u^d(x))$ と表わす。$u(x)$ の微分 du のノルムは、

$$|du(x)|^2 = \sum_{\alpha=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(x) D_i u^\alpha(x) D_j u^\alpha(x),$$

で与えられる。写像 u のエネルギー $E(u)$ を積分

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_M |du(x)|^2 \, dV(x),$$

で定義する。ここで、dV は Riemann 多様体 (M,g) の体積要素である。

$C^\infty(M,N)$ を M から N への C^∞ 写像全体の空間とする。このとき、エネルギー E は汎関数

$$E: C^\infty(M,N) \longrightarrow \mathbf{R},$$

を定義する。

定義 1.1. 写像 $u \in C^\infty(M,N)$ が汎関数 E の停留点であるとき、u を *harmonic map* と呼ぶ。M から N への harmonic map 全体の集合を $\mathcal{H} = \mathcal{H}(M,N)$ で表わす。

u が E の停留点であるとは、$t = 0 \in \mathbf{R}$ の近傍で定義された C^∞ 級の 1-parameter family $\{u_t\} \subset C^\infty(M,N)$ で、$u_0 = u$ であり、あるコンパクト集合の外では $u_t = u$ なるものに対して、つねに

$$(d/dt)E(u_t)|_{t=0} = 0,$$

を満たすことをいう。

汎関数 E の停留点が満たす Euler-Lagrange 方程式は

$$\text{(HM)} \qquad \Delta u^\alpha + \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} A^\alpha_{u(x)}(D_i u, D_j u) = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, d,$$

で与えられる。ここで、$A_y = (A^\alpha_y)$ ($y \in N$) は、多様体 N ($\subset \mathbf{R}^d$) の第二基本形式を表わす。(HM) は、非線型2階楕円型偏微分方程式系であり、これを harmonic map の方程式と呼ぶ。式 (HM) は、Δu を M から $\mathbf{R}^d$ への写像としてみたとき、Δu の N に対する接方向成分が消えることと同値である。例として、$N = S^n = \{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \}$ のとき、式 (HM) は

$$\Delta u^\alpha + |du|^2 u^\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, n+1,$$

となる。以下では、harmonic map の良く知られた例を述べる。

例 1.2. $N = \mathbf{R}$ のとき、harmonic map $u : M \longrightarrow \mathbf{R}$ は調和関数である。実際、式 (HM) は Lapace の方程式 $\Delta u = 0$ となる。

例 1.3. $M = (0,1) \subset \mathbf{R}$ のとき、式 (HM) は、測地線の方程式にほかならない。このとき、 harmonic map $u : (0,1) \longrightarrow N$ は、弧長に比例する助変数の測地線となる。

例 1.4. $M = N = S^2$ のとき、harmonic map $u : S^2 \longrightarrow S^2$ は、 Riemann 球面 S^2 から自分自身への正則または反正則写像に限ることが知られている ([2], [4])。このとき、極射影 $\pi : \mathbf{C} \longrightarrow S^2$ により、局所座標系を定めれば、 harmonic map u は、複素係数の多項式 P, Q により、

$$u(z) = \pi\Big(\frac{P(z)}{Q(z)}\Big), \qquad \text{or} \quad = \pi\Big(\frac{P(\bar z)}{Q(\bar z)}\Big),$$

の形に表わせる。この式より、harmonic map $u : S^2 \longrightarrow S^2$ のエネルギー $E(u)$ は、4π の整数倍の値しかとらないことがわかる。

2. 主結果

$p \geq 1$, $\Lambda \geq 0$ に対し、 harmonic map の集合 $\mathcal{H}$ の部分集合を次で定義する。

$$\mathcal{H}_p = \{\ u \in \mathcal{H}\ \mid\ \int_M |du|^p dV < \infty\ \},$$

$$\mathcal{H}_p(\Lambda) = \{\ u \in \mathcal{H}\ \mid\ \int_M |du|^p dV \leq \Lambda\ \}.$$

また、$W^{1,p} = W^{1,p}(M, \mathbf{R}^d)$ で、 M から $\mathbf{R}^d$ への L^p 写像のなす 1 階の Sobolev 空間を表わす。

Riemann 多様体 (M, g), (N, h) に対し、次の仮定をおく。

(A.1)　M はコンパクトで、$\dim M \geq 3$ 。

(A.2)　$N \subset \mathbf{R}^d$ の第二基本形式 A_y は有界である。

(A.3)　N の断面曲率は、上に有界である（その上限を κ とする。）

上の仮定のもとで、次の主結果を得る（ [10])。

主定理 I. $p > m$ とし、$\{u_j\}$ を $W^{1,p}$ ノルムで有界な $\mathcal{H}_p$ の列とする。このとき、部分列 $\{u_k\} \subset \{u_j\}$ で、 $\mathcal{H}_p$ の元 u に C^∞ 位相で収束するものが存在する。

主定理 II. $\{u_j\}$ を $W^{1,m}$ ノルムで有界な $\mathcal{H}_m$ の列とする。このとき、部分列 $\{u_k\} \subset \{u_j\}$, $u \in \mathcal{H}_m$, M の有限部分集合 $\mathcal{S} = \{\ x_1, \cdots, x_I\ \}$（空集合の場合もある）が存在し、次の (i) ～ (iii) を満たす。

(i) $E(u_k - u) \longrightarrow 0, \qquad (\ k \longrightarrow \infty\ .\ )$

(ii) 部分列 $\{u_k\}$ は $M - \mathcal{S}$ 上、C^∞ 位相で u に収束する。

(iii) 各 $x_i \in \mathcal{S}$ に対し、正の定数 α_i が存在して、

$$|du_k|^m dV \longrightarrow |du|^m dV + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \delta_{x_i}, \qquad \text{as} \quad k \longrightarrow \infty,$$

が成り立つ。ここで、収束は測度の弱位相の意味である。また、δ_{x_i} は Dirac のデルタ 関数を表わす。

注意 2.1.

(1) N がコンパクトで、非正断面曲率をもつ（すなわち、$\kappa \leq 0$ ）の場合には、の次元に関係なく、$\mathcal{H}_2(\Lambda)$ が C^∞ 位相でコンパクトになる。これは、良く知られた結果である。([2], [7])

(2) M が 2 次元の場合には、主定理 II と同様の結果が Sack-Uhlenbeck ([6]), Struwe ([8]) により得られている。

(3) 他の非線型問題に対しても、主定理 I, II と同様の結果が知られている。Yang-Mills 接続について、主定理 I, II に対応する結果は Uhlenbeck ([11]) により得られている。Einstein 計量に対しては、主定理 II と同様の結果が、坂東－加須栄－中島 ([1]) によって得られている。

3. Harmonic map に対する a priori 評価

ここでは、主定理 I, II の証明に必要な、 harmonic map の一階微分に対する評価式について述べる。

harmonic map に対する Bochner-Weitzenböck の公式（ [2], [7] ）より、次が得られる。

補題 3.1. harmonic map u に対し、次式が成り立つ。

$$|du|\Delta|du| \geq \sum_{\mu} Ric^M(u^*\theta^\mu, u^*\theta^\mu) - \sum_{i,j} R^N(u_*e_i, u_*e_j, u_*e_i, u_*e_j), \tag{3.1}$$

ここで、 $\{e_i\}$, $\{\theta^\mu\}$ はそれぞれ TM, T^*N の局所正規直交基底であり、 $Ric^M(\cdot,\cdot)$, $R^N(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ はそれぞれ、 M の Ricci 曲率テンソル， N の Riemann 曲率テンソルを表わす。

不等式 (3.1) により、次式が導かれる。

$$\Delta|du| \geq -a|du| - \kappa|du|^3, \tag{3.2}$$

ここで、a は n と Ricci 曲率 Ric^M から決まる定数である。式 (3.2) で、 $f = |du|$, $\kappa|du|^2 = b(x)$ とおけば、

$$\Delta f + (a + b(x))f \geq 0, \tag{3.3}$$

となる。よって、関数 $f = |du|$ は、線型楕円型方程式の subsolution とみなせる。式 (3.3) に de Giorgi-Nash-Moser の iteration method ([3]) を用いて、次の評価を得る。

定理 3.2. $p > m, \Lambda > 0$ とする。このとき、定数 $C_1 = C_1(m, n, p, g, \kappa, \Lambda)$ が存在して、任意の $u \in \mathcal{H}_p(\Lambda)$ と任意の測地球 $B(r)$ ($\subset M$) に対して、不等式

$$\sup_{B(r/2)} |du|^2 \leq \frac{C_2}{r^m} \int_{B(r)} |du|^2 dV, \tag{3.4}$$

が成り立つ。

定理 3.3. ([9]) 次の性質をもつ定数 $\epsilon = \epsilon(m, g) > 0$ と定数 $C_2 = C_2(m, n, g, \kappa)$ が存在する。:

harmonic map u が、ある測地球 $B(r)$ に対して、$\int_{B(r)} |du|^m dV \leq \epsilon$ を満たすならば、不等式

$$\sup_{B(r/2)} |du|^2 \leq \frac{C_2}{r^m} \int_{B(r)} |du|^2 dV \leq \frac{C_2}{r^2} \epsilon^{2/m}, \tag{3.5}$$

が成り立つ。

注意 3.4. N が非正断面曲率をもつ（すなわち、$\kappa \leq 0$）ならば、式 (3.3) は

$$\Delta f + af \geq 0,$$

となる。この場合には、subsolution に対する mean value inequality を用いて、任意の $u \in \mathcal{H}_2(\Lambda)$ に対し、不等式 (3.4) が成り立つことが、示される。

4. 主定理の証明

ここでは、主定理 I, II の証明の概略を述べる。

(主定理 I. の証明)

仮定より、 $\Lambda \geq 0$ が存在して、

$$\int_M |u_j|^p dV + \int_M |du_j|^p dV \leq \Lambda,$$

が任意の j に対して成り立つ。空間 $W^{1,p}$ の有界集合は弱位相に関して相対コンパクトであるから、部分列 $\{u_k\} \subset \{u_j\}$ をえらんで $\{u_k\}$ が $W^{1,p}$ の元 u に弱収束するようにできる。

コンパクト集合 K を一つ固定する。定理 3.1 より、一階微分 $\{du_j\}$ は K 上、一様有界となる。この事実と仮定 (A.2) より、$\{\Delta u_j\}$ も K 上、一様有界となる。楕円型方程式の L^p 評価と Schauder 評価を用いて、u_j の任意の階数の微分が K 上、一様有界となる。Ascoli-Arzela の定理より、 C^∞ 位相で u に収束する部分列 $\{u_k\}$ がえらべる。 (証明終)

(主定理 II. の証明)

(第 1 段) 主定理 1. の証明と同様にして、 $W^{1,m}$ の元 u に弱収束する $\{u_j\}$ の部分列が存在する。仮定 (A.1) より、$\{\Delta u_j\}$ は $L^{m/2}$ で有界、よって、 L^p 評価を用いて、 $\{u_j\}$ は階数 2 の Sobolev 空間 $W^{2,m/2}$ で有界となる。Sobolev imbedding $W^{2,m/2} \hookrightarrow W^{1,2}$ のコンパクト性より、(i) が証明できる。

(第 2 段) 集合 $\mathcal{S}$ を、次式で定義する。

$$\mathcal{S} = \bigcap_{r>0} \{\ x \in M \ \mid \ \liminf_{j\to\infty} \int_{B(x,r)} |du_j|^m dV > \epsilon\ \}, \tag{4.1}$$

ここで、 $B(x,r)$ は x を中心とする半径 r の測地球である。$\mathcal{S}$ の 0 次元 Hausdorff 測度を計算することによって、 $\mathcal{S}$ が有限集合であることが証明できる。

（第 3 段） 任意の $x \in M - \mathcal{S}$ に対して、ある $r > 0$ と無限個の j に対して、

$$\int_{B(x,r)} |du_j|^m dV \leq \epsilon, \tag{4.2}$$

が成り立つ。定理 3.2 より、(4.2) を満たす u_j の微分 du_j は $B(x, r/2)$ 上、一様有界となる。主定理 I の証明と同様にして、$M - \mathcal{S}$ 上、C^∞ 位相で収束する部分列がえらべる。

（第 4 段） 極限 u は $M - \mathcal{S}$ 上では harmonic map であり、

$$\int_M |du|^m dV \leq \liminf_{j \to \infty} \int_M |du_j|^m dV < \infty,$$

が成り立つ。次の孤立特異点の除去可能定理より、u は M 全体で harmonic map となる。

定理 4.1. ([5], [9]) U を M の開集合で、$x_0 \in U$ とする。L^1 写像 $u : U \longrightarrow N$ は $U - \{x_0\}$ 上、harmonic map で、

$$\int_U |du|^m dV < \infty,$$

を満たすとする。このとき、u は U 全体から N への harmonic map に拡張される。

（第 5 段） M 上の（符号付きの）測度の列 $\{\mu_j\}$ を、次で定義する。

$$\mu_j(A) = \int_A (|du_j|^m - |du|^m) dV, \qquad \text{for} \quad A \subset M.$$

仮定より、μ_j の全変動は一様有界となり、測度 ν に弱収束する部分列をえらべる。第 3 段より、ν の台は $\mathcal{S}$ に含まれることがわかる。$\mathcal{S}$ は有限集合であるから、ν はデルタ関数の一次結合となり、(iii) が証明できる。　（証明終）

注意 4.2. 定数 α_i は評価式 $\alpha_i \geq \epsilon > 0$ を満たすことが証明できる。ここで、ϵ は定理 3.3. に現われる定数である。

5. 主定理 II に対する補足

最後に、集合 S のまわりでの $\{u_j\}$ の挙動について述べる。S の点 x_i をひとつ固定し、x_i を原点とする M の正規座標をえらんでおく。M から N への harmonic map u と $r > 0$ に対し、$u_r(x) = u(rx)$ とおく。u_r は M の Riemann 計量 $g_r(x) = g(rx)$ に対する harmonic map となることに注意する。このとき、次の定理が成り立つ。

命題 5.2. 主定理 II の仮定のもとで、部分列 $\{u_k\} \subset \{u_j\}$ と正数の列 $\{r_k\}$ が存在し、次の (1) ~ (3) を満たす。

(1) $r_k \longrightarrow 0, \quad (\, k \to \infty.\,)$

(2) $u_{k,r_k}(x) = u_k(r_k x)$ とすると、$\{u_{k,r_k}\}$ は、 $\mathbf{R}^m$ 上、 C^∞ 位相で収束する。

(3) $\{u_{k,r_k}\}$ の極限を v とすると、 v は $\mathbf{R}^m$ から N への harmonic map であり、

$$\int_{\mathbf{R}^m} |dv|^m dV < \infty,$$

を満たす。

上の命題より、次の定理が証明できる。

定理 5.3. Riemann 多様体 N は、次の性質 (L) をもつとする。

(L) harmonic map $v : \mathbf{R}^m \longrightarrow N$ で、 $\int_{\mathbf{R}^m} |dv|^m dV < \infty$ を満たすものは定値写像しかない。

このとき、 $W^{1,m}$ ノルムが有界な harmonic map の列 $\{u_j\}$ に対し、 M 上、C^∞ 位相で M から N への harmonic map に収束する部分列がえらべる。すなわち、主定理 II において、つねに S は空集合となる。

参考文献

[1] S. Bando, A. Kasue and H. Nakajima : On a construction of coordinates at infinity on a manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth. preprint.

[2] J. Eells and L. Lemaire : A report on harmonic maps. Bull. London Math. Soc. 10, pp.1-68, (1978).

[3] D. Gilbarg and N. S. Trudinger : "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order." second edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[4] L. Lemaire : Applications harmoniques de surfaces riemanniennes. J. Diff. Geometry 13, pp.51-78, (1978).

[5] G. Liao : A regularity theorem for harmonic maps with small energy. J. Diff. Geometry 22, pp.233-241, (1985).

[6] J. Sacks and K. K. Uhlenbeck : The existence of minimal immersion of 2-spheres. Ann. of Math. 113, pp.1-24, (1981).

[7] R. Schoen : Analytic aspects for the harmonic map problem. in "Seminar on Nonlinear Partial Differential Equations." ed. S. S. Chern, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[8] M. Struwe : On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces. Comment. Math. Helvecti 60, pp.558-581, (1985).

[9] S. Takakuwa : On removable singularities of stationary harmonic maps. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 32, pp.373-395, (1985).

[10] S. Takakuwa : in preparation

[11] K. K. Uhlenbeck : Connection with L^p bounds on curvature. Comm. Math. Physics 83, pp.31-42, (1982).